Colles de Maths - semaine 1 - MP*1
Lycée du Parc

Julien Allasia - ENS de Lyon

Choses à retenir

- En dimension finie, penser à utiliser des supplémentaires.
- Introduire des applications linéaires bien choisies (dont la surjectivité ou l'injectivité est claire).
- Bien comprendre l'intérêt majeur de la dimension finie : transformer une CN en CNS, une inclusion en égalité, une application linéaire injective ou surjective en isomorphisme, une somme en somme directe...

Exercice 1 (*)

1. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, E^* son espace dual. Soit $(f_i)_{1\leq i\leq n}$ une base de E^*. Montrer qu'il existe une base $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ de E telle que pour tout i, $e_i^* = f_i$.
2. On suppose maintenant que E est de dimension infinie, et admet une base $(e_i)_{i\in I}$. La famille $(e_i^*)_{i\in I}$ est-elle libre ? génératrice ?

Exercice 2 (*) Soit E un espace vectoriel de dimension finie n et soit $k \in \{1,...,n-1\}$. Que dire d'un endormorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ qui stabilise tous les sous-espaces de E de dimension k ?

Exercice 3 (*) Soit E, F deux espaces vectoriels de dimension finie, $f, g \in \mathcal{L}(E,F)$. Montrer que

$$rg(g) \leq rg(f) \iff \exists\, h \in GL(F), k \in \mathcal{L}(E),\ h \circ g = f \circ k.$$

Exercice 4 (**) Soit E, F, G, H quatre K-espaces vectoriels de dimension finie, $a \in \mathcal{L}(E,F)$, $b \in \mathcal{L}(G,H)$ et $\psi_{a,b}$ l'application de $\mathcal{L}(F,G)$ dans $\mathcal{L}(E,H)$ définie par

$$\psi_{a,b}(u) = b \circ u \circ a.$$

Déterminer l'image de $\psi_{a,b}$ en fonction de a et b.
Indication : commencer par déterminer la dimension du noyau.

Exercice 5 (***) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que

$$tr(A) = 0 \iff \exists B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ A = BC - CB.$$

Indication : Montrer qu'une matrice de trace nulle est semblable à une matrice de diagonale nulle.
Pour les meilleurs : donner une condition sur K pour que le résultat soit encore vrai pour $A \in \mathcal{M}_n(K)$

Exercice 6 (***) Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit $p_1, ..., p_m$ des projecteurs de E. Montrer que $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} p_i$ est un projecteur si et seulement si pour tous $i \neq j$, $p_i \circ p_j = 0$.

Indication : Pour le sens direct, montrer que $\mathrm{Im}\left(\displaystyle\sum_i p_i\right) = \displaystyle\bigoplus_{i=1}^{m} \mathrm{Im}(p_i)$.
Pour les meilleurs : donner une condition sur K pour que le résultat soit vrai en remplaçant $\mathbb{C}$ par K et donner un exemple de corps K ne vérifiant pas cette condition pour lequel le résultat est faux.